# “微积分”精要

## 一、函数

1．函数 $f(x)=\left|4-x^2\right|$ 有界且单调增加的区间是（ B ）.

A．$(-2,2)$　　B．$(-2,0)$　　C．$(0,2)$　　D．$(2,+\infty)$

分析：A 不正确，因为当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)=\left|4-x^2\right|$ 有界非单调.

C 不正确，因为当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)=\left|4-x^2\right|$ 有界但单调减少.

D 不正确．因为当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(x)=\left|4-x^2\right|$ 单调增加但无界.

2．函数 $f(x)=\sin(2x)+\arctan x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是（ C ）.

A．无界奇函数　　B．无界偶函数　　C．有界奇函数　　D．有界偶函数

分析：B,D 均不正确，因为 $\sin(2x),\arctan x$ 均为奇函数，故 $f(x)=\sin(2x)+\arctan x$ 为奇函数.

3．函数 $f(x)=\cos(2x)+\left|\arctan x\right|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是（ D ）.

A．无界奇函数　　B．无界偶函数　　C．有界奇函数　　D．有界偶函数

分析：A,B 均不正确，因为 $\left|\cos(2x)\right|\le 1,\left|\arctan x\right|<\dfrac{\pi}{2}$，故 $f(x)=\cos(2x)+\left|\arctan x\right|$ 有界

C 不正确．因为 $\cos(2x),\left|\arctan x\right|$ 均为偶函数，故 $f(x)=\cos(2x)+\left|\arctan x\right|$ 为偶函数.

## 二、无穷小量

1．当 $x\to 0$ 时，$x^2+\sin x$ 是关于 $x$ 的（ D ）.

A．高阶无穷小量　　B．低阶无穷小量

C．同阶但不等价无穷小量　　D．等价无穷小量

分析：根据无穷小量阶的比较的概念，只需计算比的极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}(x+\frac{\sin x}{x})=0+1=1$$

2．当 $x\to 0$ 时，$x^3-\arcsin x$ 是关于 $x$ 的（ C ）.

A．高阶无穷小量　　B．低阶无穷小量

C．同阶但不等价无穷小量　　D．等价无穷小量

分析：根据无穷小量阶的比较的概念，只需计算比的极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\arcsin x}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2-\frac{\arcsin x}{x})=-1$$

3．当 $x\to 0$ 时，$x^2-\tan 2x$ 是关于 $x$ 的（ C ）.

A．高阶无穷小量　　B．低阶无穷小量

C．同阶但不等价无穷小量　　D．等价无穷小量

分析：根据无穷小量阶的比较的概念，只需计算比的极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-\tan(2x)}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2-\frac{2x}{x})=-2$$

## 三、导数

1．在$[-1,1]$上满足罗尔定理的函数是（ A ）.

A． $y=e^{-x^2}$　　B． $y=\sqrt[3]{x^2}$

C． $y=\dfrac{1}{1-x^2}$　　D． $y=\dfrac{\sin x}{x}$

分析：B 中函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 是初等函数，在[-1,1]有定义，从而连续，但 $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ 在 $x=0$ 不存在，故 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 不满足定理的第二个条件.

C 中函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 处无定义，故它在$[-1,1]$不连续，不满足定理的第一个条件.

D 中函数 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 $x=0\in(-1,1)$ 间断，故不满足定理的第一个条件.

A 中函数 $y=e^{-x^2}$ 是初等函数，定义域为$(-\infty,+\infty)$，故在$[-1,1]$上连续，$y'=-2xe^{-x^2}$ 在$(-1,1)$存在，在$(-1,1)$可导，而且 $y=e^{-x^2}$ 在 $x=-1$ 与 $x=1$ 的值相等，因此 $y=e^{-x^2}$ 在$[-1,1]$上满足罗尔定理.

2．设 $f'(x_0)=1$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=$（ B ）.

A． $-4$　　B． $-3$

C． $-2$　　D． $-1$

分析：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(-3)\cdot\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{-3\Delta x}=-3f'(x_0)=-3.$

3．设 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=$（ B ）.

A． 0　　B． $\dfrac{1}{2}$

C． 1　　D．不存在

分析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1}{2}f'(x_0)=\dfrac{1}{2}.$

## 四、不定积分

1． 下列等式中正确的是（ D ）.

A． $[\int f(x)dx]'=f(x)+C$　　B． $\int df(x)=f(x)$

C． $d[\int f(x)dx]=f(x)$　　D． $\int f'(x)dx=f(x)+C$

分析：由不定积分的性质可知：$[\int f(x)dx]'=f(x)$，故 A 不正确，同理应有 $\int df(x)=f(x)+C$，$d[\int f(x)dx]=f(x)dx$，故 B 和 C 都不正确。

2．$\int\dfrac{f'(x)}{4+[f(x)]^2}dx=$（ A ）.

A． $\dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{f(x)}{2}+C$　　B． $\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{f(x)}{4}+C$

C． $\dfrac{1}{2}\ln|2+f(x)|+C$　　D． $\ln|2+f(x)|+C$

分析：$\int\frac{f'(x)}{4+[f(x)]^2}dx=\int\frac{df(x)}{2^2+[f(x)]^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{f(x)}{2}+C$

3．设 $\sin x$ 是 $f(x)$ 一个原函数，则 $\int xf'(x)dx=$（ A ）.

A． $x\cos x-\sin x+C$　　B． $\cos x-x\sin x+C$

C． $x\sin x-\cos x+C$　　D． $\sin x-x\cos x+C$

分析：$\int xf'(x)dx=\int xdf(x)=xf(x)-\int f(x)dx=x(\sin x)'-\int f(x)dx=x\cos x-\sin x+C.$

## 五、旋转体的体积

1．由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与直线 $y=x$，$y$ 轴所围平面图形绕 $x$ 轴旋转一周生成的旋转体体积等于（ C ）.

A． $\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\sqrt{1-x^2}-x)^2dx$　　B． $\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x-\sqrt{1-x^2})^2dx$

C． $\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[(\sqrt{1-x^2})^2-x^2]dx$　　D． $\pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}[x^2-(\sqrt{1-x^2})^2]dx$

分析：根据旋转体体积的计算公式，曲边梯形 $D=\{(x,y)|a\le x\le b,0\le y\le f(x)\}$ 绕 $x$ 轴旋转一周的旋转体体积 $V=\pi\int_a^b[f(x)]^2dx$，本题中所给 D 不是以 $[0,\frac{\sqrt{2}}{2}]$ 为底的曲边梯形，而是曲边梯形 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$ 中除去曲边梯形 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\le y\le x\right\}$ 的部分，故所求为两旋转体体积之差，因此应该为平方之差，而不是差的平方，所以 A，B 不对，由题意知，当 $0\le x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$，有 $x\le\sqrt{1-x^2}$，所以应为 $(\sqrt{1-x^2})^2$ 与 $x^2$ 之差，即选 C 正确.

## 六、单调性

1． 下列命题中正确的是（ D ）.

A．极小值必小于极大值

B．若 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有 $f'(x_0)=0$，则 $f(x_0)$ 必为极值

C．若 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极值，则必有 $f'(x_0)=0$

D．若 $f(x_0)$ 为可导函数 $f(x)$ 的极值，则必有 $f'(x_0)=0$

分析：A 不正确，如 $f(x)=2x+\frac{2}{x}$，极小值为 4，而极大值为 $-4$，即极小值大于极大值；

B 不正确，如 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点；

C 不正确，如 $f(x)=|x|$，$f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，但 $f'(0)$ 不存在；

2． 曲线 $f(x)=xe^{2x}$ 在 $(-2,-1)$ 内（ B ）.

A．单减且凹　　B．单减且凸

C．单增且凹　　D．单增且凸

分析：$f'(x)=(1+2x)e^{2x}$，$f''(x)=(4+4x)e^{2x}$，故 $\forall x\in(-2,-1)$，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，故 $f(x)=xe^{2x}$ 在 $(-2,-1)$ 上单减且凸.

3．曲线 $y=xe^{-2x}$ 的拐点坐标是_____________.

分析：根据判定拐点的必要条件和充分条件，应求出二阶导数.

$y'=e^{-2x}-2xe^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

$y''=-2e^{-2x}-2(1-2x)e^{-2x}=4(x-1)e^{-2x}$

令 $y''=0$，由 $x-1=0$，得 $x=1$.

又当 $x<1$时，$y''<0$；$x>1$时，$y''>0$，所以曲线上横坐标为1的点为拐点，将 $x=1$代入曲线方程 $y=xe^{-2x}$ 中，得 $y=\frac{1}{e^2}$，故拐点坐标为 $(1,\frac{1}{e^2})$.

4．曲线 $y=\sqrt[3]{(x-2)^5}$ 的拐点坐标是____________________.

分析：由 $y'=\frac{5}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}}, y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-\frac{1}{3}}$ 知，$y''\neq 0$，$y''(2)$ 不存在，当 $x<2, y''<0$，$x>2, y''>0$，故 $(2,0)$ 为所求曲线拐点.

## 七、函数极限

1．若 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=e^k$，则 $k=$_____.

分析：$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-x)]^{\frac{1}{-x}\cdot(-2)}=e^{-2}$，由 $e^{-2}=e^k$，得：$k=-2$

2．若 $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=$ _____.

分析：$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{-\frac{1}{3x}(-3)}=e^{-3}$

3．若 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{-n}=$ _____.

分析：$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n-1})^{-n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n-1}{n})^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{(-n)(-1)}=\frac{1}{e}$

4.（本题 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin t dt}{x^3}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\sin t dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3}.$$

5.（本题 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\frac{1}{2e}$.

6.（本题 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}$.

解：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \arctan t dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

## 八、函数连续

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{2x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续，则 $a=$_____.

分析：要使函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，必须满足 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$，即

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}=f(0)=a$

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}3e^x-\cos x, & x\le0\\ \dfrac{\sin 2x}{\tan ax}, & 0<x<1\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续，则 $a=$_____.

分析：由连续的定义可知，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=3e^0-\cos0=2$, 而 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin 2x}{\tan ax}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x}{ax}=\dfrac{2}{a}$, 故 $\dfrac{2}{a}=2$, $a=1$

3．设函数 $f(x)=\begin{cases}a+x, & x\le0\\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 连续，则 $a=$_____.

分析：由连续的定义可知，

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)=a+0=a$,

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(x^2+x)(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1}+1)}=\dfrac{1}{2}$

## 九、偏导数和全微分

1．设 $z=e^{\frac{x}{y}}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________________________.

分析：根据高阶偏导法则，先计算

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}$

则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{1}{y}e^{\frac{x}{y}})=\dfrac{-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\cdot y-e^{\frac{x}{y}}}{y^2}=-\dfrac{1}{y^3}(x+y)e^{\frac{x}{y}}$.

2．设 $z=x\sin(y+2)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________________________.

分析：依高阶偏导法则,先计算 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\sin(y+2)$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(y+2)$.

3．设 $z=e^{x+y^2}$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$____________________________.

分析：依高阶偏导法则,先计算 $\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y^2}$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2ye^{x+y^2}$.

4.（本题 7 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\sin z=xyz$ 确定，求 $dz$ .

解：设 $F(x,y,z)=\sin z-xyz$

$$F_x'=-yz,,\quad F_y'=-xz,\ F_z'=\cos z-xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{yz}{\cos z-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{xz}{\cos z-xy};$$

所以 $dz=\frac{yz}{\cos z-xy}dx+\frac{xz}{\cos z-xy}dy$ .

5.（本题 7 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z^3-3xyz=a^3$ 确定，求 $dz$ .

解：设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$

$$F_x'=-3yz,,\quad F_y'=-3xz,\ F_z'=3z^2-3xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy}.$$

所以 $$dz=\frac{z}{z^2-xy}(ydx+xdy)$$

6.（本题 7 分）设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $xyz=e^{x-y}$ 确定，求 $dz$.

解：设 $F(x,y,z)=xyz-e^{x-y}$

$$F_x'=yz-e^{x-y},,\quad F_y'=xz+e^{x-y},\ F_z'=xy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{yz-e^{x-y}}{xy}=\frac{e^{x-y}-yz}{xy}=\frac{xyz-yz}{xy}=\frac{xz-z}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{xz+e^{x-y}}{xy}=-\frac{xz+xyz}{xy}=-\frac{z+yz}{y}.$$

则 $$dz=\frac{xz-z}{x}dx-\frac{yz+z}{y}dy$$

## 十、定积分

1. $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+x^2)dx=$______.

分析：根据奇函数在对称区间上的定积分为零，

有 $\int_{-1}^{1}(x^3\cos x+x^2)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}$。

2. $\int_{-1}^{1}(\frac{x^3|\sin x|}{1+x^2}+x^4)dx=$______.

分析：根据奇函数在对称区间上的定积分为零，

则 $\int_{-1}^{1}(\frac{x^3|\sin x|}{1+x^2}+x^4)dx=\int_{-1}^{1}x^4dx=2\int_0^1 x^4dx=\frac{2}{5}$

3. $\int_{-1}^{1}(\frac{x^3\cos x}{1+x^2}+3x^2)dx=$___________.

分析：根据奇函数在对称区间上的定积分为零，则

$\int_{-1}^{1}(\frac{x^3\cos x}{1+x^2}+3x^2)dx=\int_{-1}^{1}3x^2dx=2\int_0^1 3x^2dx=2x^3\Big|_0^1=2$。

4.（本题 9 分）计算 $\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx.$

令 $t=-\sqrt{x}$, 则 $x=t^2, dx=2tdt$, 且 $x$ 从 $0\to 1$ 时，$t$ 从 $0\to -1$.

$\int_0^1 e^{-\sqrt{x}}dx=2\int_0^{-1}e^t tdt=2\int_0^{-1}tde^t=2(te^t\Big|_0^{-1}-\int_0^{-1}e^t dt)$

$=2(-\frac{1}{e}-e^t\Big|_0^{-1})=2-\frac{4}{e}$

5.（本题 9 分）求 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ .

解：

令 $x=\sin t$, 则 $dx=\cos tdt$. $x=0$ 时，$t=0$；$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$t=\frac{\pi}{3}$.

$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^3 t}{\cos t}\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(-\sin^2 t)d\cos t=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 t-1)d\cos t$

$=(\frac{\cos^3 t}{3}-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{24}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{5}{24}$

6.（本题 9 分）求 $\int_0^1 x\sqrt{3-2x}dx$ .

解：

令 $t=\sqrt{3-2x}$，则 $x=\frac{3-t^2}{2}$，$dx=-tdt$. $x=0$ 时，$t=\sqrt{3}$；$x=1$ 时，$t=1$.

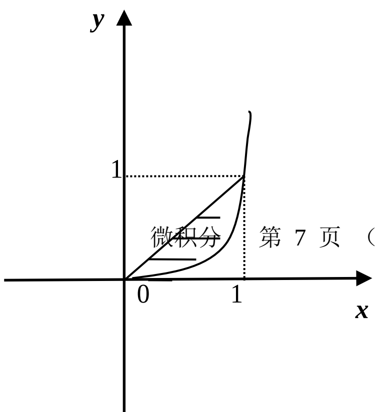
$\int_0^1 x\sqrt{3-2x}dx=\int_{\sqrt{3}}^{1}\frac{3-t^2}{2}(-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}}(3t^2-t^4)dt$

$=\frac{t^3}{2}\Big|_1^{\sqrt{3}}-\frac{t^5}{10}\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{3}-2}{5}.$

## 十一、二重积分

1. 更换积分次序，$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)dx=$____________________________.

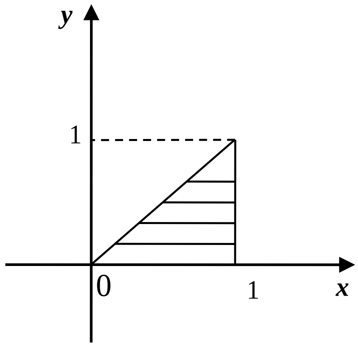
分析：



由已知二次积分知：$0 \le y \le 1$，$y \le x \le \sqrt{y}$，从而$\iint\limits_D f(x, y) dxdy$的积分区域如上图中阴影所示，更换积分次序时，将 D 表为：$0 \le x \le 1$，$x^2 \le y \le x$，所以

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x, y) dy$$

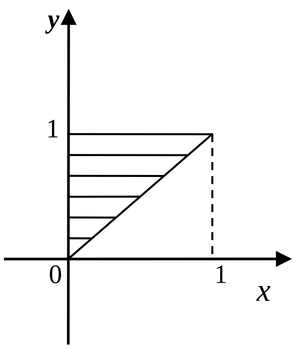
2．设平面区域 $D$ 由直线 $y = x$，$x = 1$ 与 $x$ 轴所围，则 $\iint\limits_D dxdy =$_____.




根据二重积分的几何意义，

表示 D 的面积，而 D 为右图所示阴影部分，它的面积为：

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$, 故 $\iint\limits_D dxdy = \frac{1}{2}$.




6．设平面区域 $D$ 由直线 $y = x$，$y = 1$ 与 $y$ 轴所围，则 $\iint\limits_D 2dxdy =$_____.

分析：

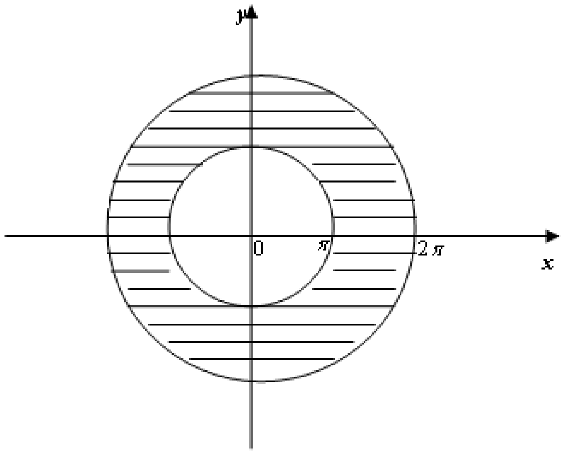
根据二重积分的几何意义 $\iint\limits_D dxdy$ 表示 D 的面积，

而 D 为左图所示的阴影部分，

它的面积为：

$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$, 故 $\iint\limits_D 2dxdy = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

3.（本题 9 分）计算 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2 + y^2} dxdy$，其中 $D = \{(x, y) | \pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\}$.



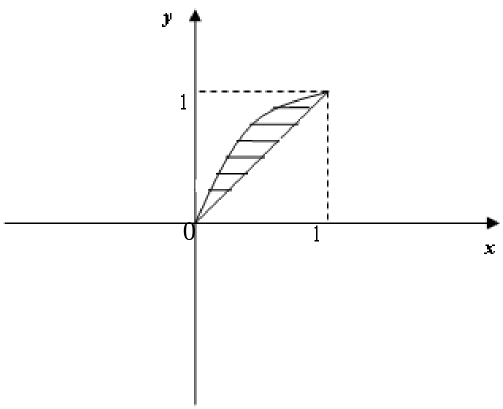

解：积分区域 $D$ 的图形为上图阴影所示圆环域，在极坐标下

$D' = \{(r,\theta) | 0 \le \theta \le 2\pi, \pi \le r \le 2\pi\}$

$$\iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \iint_{D'} r\sin r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\pi^{2\pi} r\sin r dr = 2\pi(\sin r - r\cos r)\Big|_\pi^{2\pi} = -6\pi^2 .$$

4.（本题 9 分）计算 $\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy$, 其中 $D$ 由曲线 $y=\sqrt{x}, y=x$ 所围的闭区域.

）解：积分区域为右图所示阴影部分，则




$$\iint_D \frac{\sin y}{y} dxdy =$$
$$= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy$$
$$= \int_0^1 (\sin y - y\sin y)dy$$
$$= \int_0^1 \sin y dy + \int_0^1 y d\cos y$$
$$= -\cos y\Big|_0^1 + y\cos y\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy$$
$$= 1-\cos 1 + \cos 1 - \sin y\Big|_0^1$$
$$= 1-\sin 1$$

5.（本题 9 分）计算 $\iint_D \frac{y}{x} dxdy$, 其中 $D$ 由 $1 \le x^2+y^2 \le 4$， $y=x$, $x$ 轴所围

解：积分区域如下图所示，在极坐标系下， $x^2+y^2=1$ 的方程化为 $r=1$，

$x^2+y^2=4$ 的方程化为 $r=2$，

由图可知， $D' = \left\{(r,\theta) \middle| 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}\right\}$

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy = \iint_{D''} \tan\theta r d\theta dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta d\theta \cdot \int_1^2 r dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2=-\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d\cos\theta}{\cos\theta}=-\frac{3}{2}\ln|\cos\theta|\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{4}\ln 2.$$

## 十二、微分方程

1．微分方程 $\frac{dy}{dx}=e^{x-y}$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解是__________________________.

分析：所给方程为变量可分离方程，分离变量，有 $e^y dy=e^x dx$

两边积分：$\int e^y dy=\int e^x dx$

$e^y=e^x+C$

由初始条件 $y(1)=0$，知 $1-e=C$，将 $C=1-e$ 代回，得 $e^y=e^x+1-e$，即 $y=\ln(e^x+1-e).$

2．微分方程 $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}$ 的通解是__________________________________.

分析：所给方程为变量可分离方程，分离变量，有 $e^{-y}dy=e^x dx$

两边积分：$\int e^{-y}dy=\int e^x dx$

$-e^{-y}=e^x+C_1$

即 $e^x+e^{-y}=C$.

3．微分方程 $(2-x^2)y=xy'$ 的通解是______________________________.

分析：所给方程为变量可分离方程，分离变量，有 $\frac{1}{y}dy=\frac{2-x^2}{x}dx$

两边积分：$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{2-x^2}{x}dx=2\int\frac{dx}{x}-\int xdx$

$$\ln y=2\ln x-\frac{x^2}{2}+\ln C$$

即 $y=Cx^2e^{-\frac{x^2}{2}}$

4．（本题 7 分）求微分方程 $y'-\frac{1}{x}y=x$ 的通解.

解：由题意知，$P(x)=-\frac{1}{x},Q(x)=x$，　则

$$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)=e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}(\int xe^{\int(-\frac{1}{x})dx}dx+C)=x(x+C)$$

所以原方程通解为：$y=x^2+Cx.$

5．（本题 7 分）求微分方程 $y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x}$ 满足初始条件 $y(\pi)=1$ 的特解.

解：由题意可知，所求微分方程变形为一阶非齐次线性微分方程，

$$P(x)=\frac{1}{x},Q(x)=\frac{\sin x}{x},$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C)$$

$$=e^{-\ln x}(\int\frac{\sin x}{x}xdx+C)=\frac{1}{x}(\int\sin xdx+C)=\frac{1}{x}(-\cos x+C)$$

将初始条件 $y(\pi)=1$ 代入上式，得

$C=\pi-1$

故所求微分方程在初始条件 $y(1)=1$ 下的特解为：

$$y=\frac{1}{x}(\pi-1-\cos x)$$

6.（本题 7 分）求微分方程 $x^2y'=x-2xy-1$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的特解.

解：将所求微分方程变形为，

$$y'+\frac{2}{x}y=\frac{x-1}{x^2}$$

此方程为一阶非齐次线性微分方程.

$$P(x)=\frac{2}{x},\ Q(x)=\frac{x-1}{x^2},$$

$$y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}(\int\frac{x-1}{x^2}e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+C)$$

$$=e^{-2\ln x}(\int\frac{x-1}{x^2}\cdot x^2dx+C)=\frac{1}{x^2}(\int(x-1)dx+C)=\frac{1}{x^2}(\frac{x^2}{2}-x+C)$$

将初始条件 $y(1)=1$ 代入上式，得

$$C=\frac{3}{2}$$

故所求微分方程在初始条件 $y(1)=1$ 下的特解为：

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}$$

## 十三、切线方程

2.（本题 7 分）求曲线 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 在 $(0,0)$ 点的切线方程.

解： 方程 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 两边同时对 $x$ 求导，可得

$$e^x-e^y\cdot y'=\cos(xy)(y+xy')$$

化简可得

$$y'=\frac{e^x-y\cos xy}{x\cos xy+e^y}$$

$$y'\big|_{(0,0)}=\frac{e^0-0\cos 0}{0\cos 0+e^0}=1$$

故曲线 $e^x-e^y=\sin(xy)$ 在 $(0,0)$ 点的切线方程为

$y-0=1(x-0)$

即 $y=x$.

2.（本题 7 分）求曲线 $xy+e^y-e=0$ 在 $(0,1)$ 点的切线方程.

解： 方程 $xy+e^y-e=0$ 两边同时对 $x$ 求导，可得:

$$y+xy'+e^yy'=0$$

化简可得

$$y'=-\frac{y}{x+e^y}$$

$$y'|_{(0,1)}=-\frac{1}{0+e^1}=-\frac{1}{e}$$

故曲线 $xy+e^y-e=0$ 在 $(0,1)$ 点的切线方程为：

$$y-1=-\frac{1}{e}(x-0)$$

即 $y=1-\dfrac{x}{e}.$

3.（本题 7 分）求曲线 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 在 $(0,0)$ 点的切线方程.

解： 方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 两边同时对 $x$ 求导，可得:

$$1-y'+\frac{1}{2}\cos y\cdot y'=0$$

化简可得

$$y'=\frac{2}{2-\cos y}$$

$$y'|_{(0,0)}=\frac{2}{2-\cos 0}=2$$

故曲线 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 在 $(0,0)$ 点的切线方程为:

$$y-0=2(x-0)$$

即 $y=2x.$

## 十四、最大值最小值

1.（本题 8 分）求函数 $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-2x$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值和最小值.

解：求函数的一阶导数，得

$$f'(x)=2x^{-\frac{1}{3}}-2=2x^{-\frac{1}{3}}(1-x^{\frac{1}{3}})$$

因此 $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-2x$ 在 $(-1,2)$ 内有不可导点 $x_1=0$ 和唯一的驻点 $x_2=1$，

比较下列值： $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(-1)=5,\ f(2)=3\sqrt[3]{4}-4>0$

故 $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-2x$ 在 $[-1,2]$ 上的最大值为 $f(-1)=5,$ 最小值为 $f(0)=0$ .

2.（本题 8 分）求函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ 在 $[-\frac{1}{2},1]$ 的最大值和最小值.

解：求函数的一阶导数，得

$$f'(x)=\frac{2x+x^2}{(x+1)^2}$$

因此 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ 在 $(-\frac{1}{2},1)$ 内有唯一的驻点 $x=0$.

比较下列值： $f(-\frac{1}{2})=\frac{1}{2},\ f(0)=0,\ f(1)=\frac{1}{2}$

3.（本题 8 分）求函数 $y=\ln(x^2+1)$ 在 $[-1,3]$ 的最大值和最小值.

解：求函数的一阶导数，得

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$$

因此 $y=\ln(x^2+1)$ 在 $(-1,3)$ 内有唯一的驻点 $x=0$.

比较下列值： $f(-1)=\ln 2, f(0)=0, f(3)=\ln 10$,

故 $y=\ln(x^2+1)$ 在 $[-1,3]$ 上的最大值为 $f(3)=\ln 10$, 最小值为 $f(0)=0$.