线性代数精要

一、逆序

1、当 i=________，j=______时，排列 1274i56j9 为偶排列。

2、四阶行列式的反对角线元素之积（即 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$）一项的符号为______________。

3、当 i=______，j= ________时，排列 1274i56j9 为偶排列。

二、代数余子式

1、行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix}$ 中元素 f 的代数余子式是__________

（A）$\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$ （B）$-\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$ （C）$\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$ （D）$-\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

2、设 A=$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & 9 & 7 \end{vmatrix}$，则代数余子式 A_{12} =__________

（A） -31 （B） 31 （C） 0 （D） -11

3、已知四阶行列式 D 中第三列元素依次为-1，2，0，1，它们的余子式依次分别为-5，3，-7，4，则 D=（ ）

A. -5 B. 5 C. 0 D. 1

4．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{vmatrix}$ 中第 2 行第 3 列元素的代数余子式的值为__________________

三、行列式的概念

1、若 n 阶行列式中非零元素少于 n 个，则该行列式的值为________________。

2．设 n 阶方阵 A 中有 n^2-n 个以上的元素为零，则 |A| 的值为（ ）

A．大于零 B．等于零

C．小于零 D．不能确定

3．设 $D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$，则 $2A_{11}+A_{21}-4A_{31}=$______________。

4、四阶行列式的反对角线元素之积（即 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$）一项的符号为______________。

5、已知四阶行列式 D 中第三列元素依次为-1，2，0，1，它们的余子式依次分别为-5，3，-7，4，则 D=__________

（A） -5　　（B） 5　　（C） 0　　（D） 1

四、行列式的性质

1、设矩阵 $A=(a_{ij})_{4\times4}, B=(b_{ij})_{4\times4}$，且 $a_{ij}=-2b_{ij}$，则行列式 $|B|=$__________

(A) $2^{-4}|A|$　　(B) $2^{4}|A|$　　(C) $-2^{-4}|A|$　　(D) $-2^{4}|A|$

2. 设行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=m$，$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}=n$，则行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+a_{23} \end{vmatrix}$ 等于（　　）

A.　m+n　　B.　-(m+n)　　C.　n-m　　D.　m-n

3、 已知四阶行列式 D 的值为 2，将 D 的第三行元素乘以¯1 加到第四行的对应元素上去，

则现行列式的值（　　）

A.　0　　B.　2　　C.　¯1　　D.　¯2

五、特殊行列式

1、$\begin{vmatrix} 1 & 2000 & 2001 & 2002 \\ 0 & -1 & 0 & 2003 \\ 0 & 0 & -1 & 2004 \\ 0 & 0 & 0 & 2005 \end{vmatrix}=$__________________。

2、$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=$_____________________。

3．行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ 的值为（　　）

A．2　　B．1　　C．0　　D．-1

六、行列式的计算

1、若行列式 $\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=0，则 k=__________________

2、计算行列式 $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ （12 分）

3、行列式 $D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 3 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 9 & -2 \end{vmatrix}$，不计算 A_{ij} 而证明 $A_{41} + A_{42} + A_{43} = 2A_{44}$

4、计算行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$。

5、计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值

6、求行列式 $\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$ 的值

7、计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值

七、方阵的行列式

1. 设4阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，$B = [\beta_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$，且 $|A| = 3, |B| = -5,$
则 $|A+B| =$ ____________

2、设 A 为三阶方阵且已知|A| = 3，则行列式 |3A|的值为_________

（A） 3　　（B）9　　（C）27　　（D）81

八、n 维向量

1、已知 $\alpha_1 = (1,1,0,1)$，$\alpha_2 = (0,1,a,4)$，$\alpha_3 = (2,1,-2,-2)$ 线性相关，则 $a =$ ____________

2、向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\7\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$是线性________（填相关或无关）的，它的一个极大线性无关组是________________

3. s 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n(3\le n\le s)$线性无关的充分必要条件是（　　）

A. 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,...,k_n$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_n\alpha_n\neq 0$

B. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中存在一个向量不能由其余向量线性表出

C. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中任意一个向量都不能由其余向量线性表出

D. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中任意两个向量都线性无关

4. 向量组 α_1=（1，2，-1，1），　α_2=（2，0，3，0），　α_3=（-1，2，-4，1）的秩为____________

10. 设向量（2，-3，5）与向量（-4，6，a）线性相关，则 a=______________。

5、设$\boldsymbol{\beta}$可由向量$\boldsymbol{\alpha}_1$=（1，0，0），$\boldsymbol{\alpha}_2$=（0，0，1）线性表示，则下列向量中$\boldsymbol{\beta}$只能是（　　　）

A.（2，1，1）　　B.（-3，0，2）

C.（1，1，0）　　D.（0，-1，0）

6、s 维向量组$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n(3\le n\le s)$线性无关的充分必要条件是（　　　）

A. 存在一组不全为零的数$k_1,k_2,...,k_n$使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+...+k_n\alpha_n\neq 0$

B. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中存在一个向量不能由其余向量线性表出

C. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中任意一个向量都不能由其余向量线性表出

D. $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$中任意两个向量都线性无关

7、向量组 α_1=（1，0，0），　α_2=（1，1，0），　α_3=（-5，2，0）的秩为________

九、矩阵运算

1、设矩阵 A=$\begin{bmatrix}3&2\\0&1\\1&4\end{bmatrix}$，B=$\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$，则 AB =_____________________

2. 设矩阵A $=\begin{pmatrix}3 & 6 & 0\\0 & 1 & -2\\3 & -1 & 9\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & -6\\9 & 1\\0 & 8\end{pmatrix}$，则矩阵A与B的乘积AB的第三行第一列的元素的值是 ________。

3. A=$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 1 & -1\end{pmatrix}$，B=$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & -2 & 4\end{pmatrix}$，则A+2B= ________。

4．设n阶方阵A，B，C满足ABC = E，则必有（　　）

A．ACB = E　　B. CBA = E

C. BAC = E　　D. BCA = E

十、矩阵的秩

1、矩阵的 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & -2 & 4 & 5\\1 & 10 & 1 & 2\end{pmatrix}$ 秩为________

2、设A,B为n阶方阵，满足等式 $AB=0$，则必有（　　）

A. $A=0$ 或 $B=0$　　B. $A+B=0$

C. $|A|=0$ 或 $|B|=0$　　D. $|A|+|B|=0$

3. 若A，B是两个n阶方阵，则下列说法正确是（　　）

A. 若 $AB=0$，则 $A=0$ 或 $B=0$

B. $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

C. 若秩 $(A)\neq 0$，秩 $(B)\neq 0$，则秩 $(AB)\neq 0$

D. 若秩 $(A)=n$，秩 $(B)=n$，则秩 $(AB)=n$

4. 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 3 & -2 & 1 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的秩是（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

十一、矩阵方程

5、设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\-1 & -2 & 4\\0 & 5 & 1\end{pmatrix}$，求 $3AB-2A$ 及 A^TB

6、设 A=$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，且矩阵 X 满足 AX=A＋2X，求 X

7、设 4 阶方阵 A, B, C 满足方程 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$，试求矩阵 A，其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8、设 A=$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$，且矩阵 X 满足 AX=A ＋ 2X，求 X

十二、逆矩阵

1. 设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，A*是 A 的伴随矩阵，则 A*中位于第一行第二列的元素是（　）

A. －6　　B. 6　　C. 2　　D. －2

2. 设矩阵 A=$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，则 A^{-1}=________________

3. 已知矩阵 A ＝$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，若 A*为 A 的伴随矩阵，则|A*|＝__________。

4、设 A 为 n 阶可逆方阵，下式中正确的是（　　）

A.（2$\boldsymbol{A}$）$^{-1}$=2$\boldsymbol{A}^{-1}$　　B.（2$\boldsymbol{A}$）^{T}=2$\boldsymbol{A}^{T}$

C. [（$\mathbf{A}^{-1}$）$^{-1}$]^{T}=[（$\mathbf{A}^{T}$）$^{-1}$]^{T}　　D. [（$\mathbf{A}^{T}$）^{T}]$^{-1}$=[（$\mathbf{A}^{-1}$）$^{-1}$]^{T}

5、设矩阵 A=$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$，A*是 A 的伴随矩阵，则 A*中位于第一行第二列的元素是（　　）

A.　–6　　B.　6　　C.　2　　D.　–2

6、设 A= $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，则 A^{-1}=________________

7. 设方程 XA-B=X，E 为三阶单位矩阵，如果 A-E 可逆，则 X=______________。

8、求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵。

十三、线性方程组的解

1、已知解向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$是齐次线性方程组$Ax=0$的基础解系，以下解向量组中，也是$Ax=0$的基础解系的是___________

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$

(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

(C) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

(D) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_4,\alpha_4-\alpha_1$

2、设方程组$\begin{cases} x_1+3x_2+x_3=1 \\ x_1-5x_2-x_3=b \\ 2x_1+2x_2+x_3=2 \end{cases}$有无穷多组解，则必有_______________

(A) $b=1$　　(B) $b=-1$　　(C) $b=2$　　(D) $b=-2$

4、设 **A** 为 3 阶方阵,且方程组 **A** x=**0** 的基础解系含有两个解向量,则 **A** 的秩为（　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

3、设齐次线性方程组$\begin{cases} kx \quad +z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \end{cases}$有非零解，则 k =__________

（A） 2　　（B） 0　　（C） -1　　（D） -2

4、如果线性方程组$\begin{cases} 3x_1-kx_2-x_3=0 \\ 4x_2-x_3=0 \\ 4x_2+kx_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 k =（　　）

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

5、若方程组$\begin{cases} bx + ay = 0 \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$有唯一解，则 abc≠______________。

6、设线性方程组为 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = b \end{cases}$，问 a，b 各取何值时，线性方程组无解，有唯一解，有无穷多解？在有无穷多解时求出其通解。

7．线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 = a \\ x_2 - x_3 = 2a \\ x_3 - x_1 = 1 \end{cases}$有解的充分必要条件是 a =（　　）

A．-1　　B．$-\frac{1}{3}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．1

8．已知方程组$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 有非零解，则 t =____________

9、求线性方程组$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$的通解，并用其基础解系表示

10、设齐次线性方程组$\begin{cases} kx + z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ kx - 2y + z = 0 \end{cases}$有非零解，则 k =（　　　　）

A.　2　　B.　0　　C. -1　　D.　-2

11、已知方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \\ -x_1 + ax_2 + x_3 = a^2 \end{cases}$ 有无穷多解，求 a 以及方程组的通解。

十四、相似矩阵

1、n 阶实对称矩阵 A 和 B 相似的充分必要条件是_________

(A)　A 与 B 都有 n 个线性无关的特征向量

(B)　$r(A) = r(B)$

(C)　A 和 B 的主对角线上的元素的和相等

(D) A与B的n个特征值都相等

2、设A,B为n阶矩阵，且A为对称矩阵，证明B^TAB也是对称矩阵.